

ГРНТИ 27.35.33

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ ОБЫКНОВЕННОЙ И НЕОБЫКНОВЕННОЙ ВОЛНЫ

*Е.Ж. Смагулов, Б.Е. Смагулов, А.Б. Абдулаева*Жетысуский государственный университет имени И.Жансугурова, Талдыкорган, Казахстан,
Smagulovezh@mail.ru, abdulaeva_aigerim@mail.ru

В работе показано, что для анизотропных свойств земной коры, например, в районах с мощным чехлом осадочных напластований проводимость σ_t вдоль напластований, превышает поперечную проводимость σ_n , тогда, в случае горизонтального залегания слоев осадочную толщу целесообразно описывать одноосной средой с тензором проводимости. В статье охарактеризована основная задача, определение геоэлектрических параметров земной коры в точке наблюдения, которая, зависит от решения математической модели геофизических задач анизотропной среды.

Ключевые слова: проводимость, математическое моделирование, анизотропные среды, уравнения Максвелла, электромагнитное поле.

Для решения геофизических задач широко используется естественное (магнитотеллурическое) поле, содержащее информацию о среде, в которой оно распространяется, метод магнитотеллурического зондирования (МТЗ) – метод интерпретации этого поля, – фактически основан на сравнении данных наблюдения с теоретически данными, полученными при решении прямых задач электродинамики для типичных моделей геоэлектрического разреза. При этом успешное решение обратной задачи, т.е. определение геоэлектрических параметров земной коры в точке наблюдения, зависит от эффективности алгоритмов расчета электромагнитных полей в слоистых средах.

Слоисто–изотропные среды послужили базовой моделью геофизики в целом, разработка математических методов расчета электромагнитных полей в подобных моделях явилась важным фактором в развитии метода МТЗ.

Современные исследования показывают, что в целом ряде анизотропных свойств земной коры, например, в районах с мощным чехлом осадочных напластований проводимость σ_t вдоль напластований как правило превышает поперечную проводимость σ_n . Следовательно, в случае горизонтального залегания слоев осадочную толщу целесообразно описывать одноосной средой с тензором проводимости)

$$\hat{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_t & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_t & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_n \end{Bmatrix}$$

ось Z направлена в глубь напластований.

Рассмотрим структуру уравнений Максвелла в полупространстве $Z \geq 0$ описываемом тензором проводимости $\sigma(z)$.

В работе Дмитриева В.И., Бердичевского М.Н. «Фундаментальная модель магнитотеллурического зондирования», а также в работе [1] показано, что полное электромагнитное поле можно представить в виде суперпозиции обыкновенной (индекс “о”) и необыкновенной (индекс “н”) волны.

$$\begin{aligned} E_x &= E_x^o + E_x^h, & H_x &= H_x^o + H_x^h, \\ E_y &= E_y^o + E_y^h, & H_y &= H_y^o + H_y^h, \\ E_z &= E_z^o + E_z^h, & H_z &= H_z^o + H_z^h. \end{aligned} \tag{1}$$

Тогда, при помощи общих электромагнитных потенциалов [2, 4, 6]

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \mu \vec{H} = \text{rot} \vec{A} \\ \vec{E} &= -i\omega \vec{A} - \text{grad} \varphi\end{aligned}\quad (2)$$

Легко получить уравнение для обыкновенной волны

$$\Delta A_{x,y} - i\omega \mu \sigma_t A_{x,y} = 0 \quad (3)$$

При этом компоненты потенциалов связаны условием

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} = 0 \quad (4)$$

и необыкновенной волны

$$\Delta A_z - (1 - \Lambda) \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} - i\omega \mu \sigma_n A_z = 0 \quad (5)$$

здесь $\Lambda = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$

Выбираем новую систему координат ξ, η, ζ с осью ζ , направленной по простиранию, осью η - по падению, с осью ξ - перпендикулярно напластованию. Угол падения пластов обозначим через α , а угол между проекцией оси η на горизонтальную плоскость и осью y - через φ . Тогда старые координаты x, y, z будут связаны с новыми координатами ξ, η, ζ по формулам [3, 5, 7]

$$\begin{aligned}x &= \xi \cos \varphi + \eta \cos \alpha \sin \varphi - \zeta \sin \alpha \sin \varphi \\ y &= -\xi \sin \varphi + \eta \cos \alpha \cos \varphi - \zeta \sin \alpha \cos \varphi \\ z &= \eta \sin \alpha + \zeta \cos \alpha\end{aligned}\quad (6)$$

В новой системе координат поле обыкновенной волны описывается потенциалом с компонентами связанными условием

$$\frac{\partial A_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial A_\eta}{\partial \eta} = 0 \quad (7)$$

и удовлетворяющими уравнению вида

$$\Delta A_j - i\omega \mu \sigma_t A_j = 0 \quad (8)$$

Поле необыкновенной волны зависит лишь от одной компоненты потенциала, удовлетворяющей условию

$$\Delta A_\xi - (1 - \Lambda) \frac{\partial^2 A_\xi}{\partial \xi^2} - i\omega \mu \sigma_n A_\xi = 0 \quad (9)$$

С использованием формул для потенциала вида

$$A_j = a_j \exp(i\omega t) \exp(-ik_x x - ik_y y) \quad (10)$$

Из уравнения для обыкновенной волны получаем

$$a_\xi = \frac{k_y \sin \varphi - k_m \cos \varphi}{(k_n \sin \varphi + k_y \cos \varphi) \cos \alpha + k_{xo} \sin \alpha} \quad (11)$$

А уравнение преобразовывается в дисперсионное, полностью совпадающее с

$$k_x^a + k_y^a + k_{xo}^a = -i\omega \mu \sigma_t \quad (12)$$

Далее

$$\begin{aligned} A_x &= A_\xi \cos \varphi + A_\eta \cos \alpha \cos \varphi \\ A_y &= A_\xi \sin \varphi + A_\eta \cos \alpha \cos \varphi \\ A_z &= A_\eta \sin \alpha \end{aligned} \quad (13)$$

Подставляя в уравнение можно определить компоненты поля, обусловленные обыкновенной волной

$$\begin{aligned} E_x^0 &= \frac{-i\omega(k_y \cos \alpha + k_{zo} \cos \varphi \sin \alpha) a_\xi}{k_m \cos \alpha + k_{xo} \sin \alpha} \\ E_y^0 &= \frac{-i\omega(k_x \cos \alpha + k_{zo} \sin \alpha \sin \varphi) a_\xi}{k_m \cos \alpha + k_{xo} \sin \alpha} \\ E_z^0 &= \frac{i(k_x B_y^0 - k_y B_x^0)}{\mu \sigma_t} \\ B_x^0 &= \frac{-ia_\xi(k_n k_y \sin \alpha - k_x k_{zo} \cos \alpha + k_y k_{xo} \sin \varphi)}{k_m \cos \alpha + k_{xo} \sin \alpha} \\ B_y^0 &= \frac{ia_\xi(k_y k_{zo} \cos \alpha + k_{zo}^a \cos \varphi \sin \alpha + k_x k_n \sin \alpha)}{k_m \cos \alpha + k_{xo} \sin \alpha} \\ B_x^0 &= \frac{(k_y E_x^0 - k_x E_y^0)}{\omega} \end{aligned} \quad (14)$$

где введены следующие обозначения

$$\begin{aligned} k_n &= k_x \cos \varphi - k_y \sin \varphi \\ k_m &= k_x \sin \varphi + k_y \cos \varphi \end{aligned} \quad (15)$$

Для необыкновенной волны имеем

$$\begin{aligned} A_x &= -A_\xi \sin \alpha \sin \varphi \\ A_y &= -A_\xi \sin \alpha \cos \varphi \\ A_z &= A_\xi \cos \alpha \end{aligned} \quad (16)$$

Используя формулы и условия находим компоненты электромагнитного поля, связанного с необыкновенной волной

$$\begin{aligned} E_x^H &= \frac{i\omega \sin \alpha \sin \varphi a_\xi + a_\xi k_x (k_m \sin \alpha - k_{xH} \cos \alpha)}{\mu \sigma_t} \\ E_y^H &= \frac{i\omega \sin \alpha \cos \varphi a_\xi + a_\xi k_y (k_m \sin \alpha - k_{zH} \cos \alpha)}{\mu \sigma_t} \\ E_z^H &= \frac{-i\omega \cos \alpha a_\xi + a_\xi k_{zH} (k_m \sin \alpha - k_{zH} \cos \alpha)}{\mu \sigma_t} \\ B_x^H &= i(k_y \cos \alpha + k_{zH} \sin \alpha \sin \varphi) a_\xi \\ B_y^H &= i(k_x \cos \alpha + k_{xH} \sin \alpha \sin \varphi) a_\xi \\ B_z^H &= \frac{(k_x E_y^H - k_y E_x^H)}{\omega} \end{aligned} \quad (17)$$

Из (9) получается дисперсионное уравнение для необыкновенной волны

$$k_x^a + k_y^a + k_{zH}^a - (1 - \Lambda)(k_m \sin \alpha - k_{xH} \cos \alpha)^a = -i\omega \mu \sigma_t \Lambda \quad (18)$$

При это уравнение полностью совпадает с

$$K_{xH}^a = -i\omega \mu \sigma_n - \frac{1}{\Lambda} (k_x^a + k_y^a)$$

Поскольку на практике измеряются полные поля, точные отдельные компоненты этих векторов, то целесообразно указать алгоритмы разделения полного поля на обыкновенную и необыкновенную волны. Общее выражения для полей есть суммы соответствующих компонент

$$\begin{aligned} E_{x,y,z} &= E_{x,y,z}^0 + E_{x,y,z}^H \\ B_{x,y,z} &= B_{x,y,z}^0 + B_{x,y,z}^H \\ B_z &= \frac{(k_y E_x - k_x E_y)}{\omega} \end{aligned} \quad (19)$$

Таким образом, математическое исследование анизотропных сред имеет большое геофизическое значение [2, 4]. Благодаря тому, что осадочные напластования земной коры являются по своим электрическим свойствам анизотропными. В тоже время в фундаментальных геофизических моделях, таких как модель магнитотеллурических зондирований, в свое время анизотропия среды как правило не учитывалось. Тем не менее, современные экспериментальные и теоретические исследования приводят к выводу о волновом характере распространения магнитотеллурического поля вдоль поверхности Земли. Этот факт наталкивает на мысль искать новые пути в направлении математического моделирования магнитотеллурических зондирований в неоднородных, в том числе в непрерывно-однородных (градиентных) анизотропных средах.

Список литературы

1. Смагулов Е. Ж. (1992) Математическое моделирование магнитотеллурических полей в анизотропных средах. Автореферат на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Алматы. 16 с.
2. Смагулов Е. Ж., Жиембаев Ж. Т., Смагулов Б. Е., Уразова М. С., Байзакова А. (2017) Сведение системы уравнений Максвелла к каноническому виду // Вестник ЖГУ имени И.Жансугурова. Талдыкорган. С.46-49.
3. Смагулов Е. Ж., Смагулов Б. Е., Тулымшакова Г. К., Адильбаева А. М. (2017) Сведение системы уравнений Максвелла к гиперболической системе // Вестник ЖГУ имени И.Жансугурова. Талдыкорган. С.49-52.
4. de Bazelaire, C., de Bazelaire, E.; Perroud, H. (2000) Analytical inversion of a stack of weakly anisotropic layers // Anisotropy 2000: Fractures, Converted Waves and Case Studies – P.163-201 - DOI: 10.1190/1.9781560801771.ch9 - 9th International Workshop on Seismic Anisotropy (9IWSA). Houston, TX. Mar 26-31.
5. Sainath, K., Teixeira, F. L. (2014) Tensor Green's function evaluation in arbitrarily anisotropic, layered media using complex-plane Gauss-Laguerre quadrature// Physical Review E - DOI: 10.1103/PhysRevE.89.053303 – May 8 .
6. Liu, S.F., Zhang, Z.C., Li, S., Liang, B. (2018) Investigation of comb-type pulse forming line with low impedance// Review of Scientific Instruments - DOI: 10.1063/1.5049797.
7. Shuai, Q., Tang, J. (2015) Direct compensation of lift-off oscillation effect in magnetic impedance-based damage detection// Journal of Intelligent Material Systems and Structures – P.2351-2361 - DOI: 10.1177/1045389X14554137.

Қарапайым және ерекше толқынның электромагниттік өрісін математикалық модельдеу

Е.Ж. Смагулов, Б.Е. Смагулов, Ә.Б. Абдулаева

І.Жансүгіров атындағы Жетісу мемлекеттік университеті, Талдыкорған қ., Қазақстан
Smagulovezh@mail.ru, abdulaeva_aigerim@mail.ru

Жұмыста жер қыртысының анизотропты қасиеттері үшін, мысалы, шөгінді қабаттаудың қуатты тысы бар аудандарда, шөгінді қабаттың бойымен σ_t ағытындысының өткізгіштігі құрылғының σ_n көлденең өткізгіштігінен асып түседі, бұл жағдайда шөгінді қабаттың көлденең жатуын өткізгіштік тензоры бар бір осьті ортамен сипаттау орынды. Мақалада анизотропты ортаның геофизикалық есептерінің математикалық моделін шешуге байланысты бақылау нүктесіндегі жер қыртысының геоэлектрлік параметрлерін анықтау міндеті сипатталған.

Түйін сөздер: өткізгіштік, математикалық модельдеу, анизотропты орта, Максвелл тендеулері, электромагниттік өріс.

Mathematical modeling of electromagnetic fields of the ordinary and extraordinary waves

E.Zh. Smagulov, B.E. Smagulov, A.B. Abdulaeva

Zhetysu State University named after I.Zhansugurov, Taldykorgan, Kazakhstan
Smagulovezh@mail.ru, abdulaeva_aigerim@mail.ru

It is shown that for the anisotropic properties of the earth's crust, for example, in areas with a strong cover of sedimentary strata, the conductivity σ_t along the overlaps exceeds the transverse conductivity σ_n , then, in the case of horizontal bedding of layers, the sedimentary thickness should be described by a uniaxial medium with a conductivity tensor. The article describes the main task of determining the geoelectric parameters of the earth's crust at the observation point, which depends on the solution of the mathematical model of geophysical problems of anisotropic medium.

Keywords: conductivity, mathematical modeling, anisotropic media, Maxwell's equations, electromagnetic field.

Поступила в редакцию 21.12.2019