

КОМПЛЕКС САНДАР АЛГЕБРАСЫНЫҢ ПЛАНИМЕТРИЯДАҒЫ ҚОЛДАНЫСЫ**Б. Ж. Сағындықов¹, Ж. Бимұрат²**¹Сәтбаев университеті, Алматы, Қазақстан,¹Корреспондент-автордың E-mail: b.sagindykov@satbayev.university²Д. А. Қонаев атындағы Тау-кен институты, Алматы, Қазақстан²bimuratzhanar@gmail.com**Аңдатпа**

Мақала комплекс сандар алгебрасын қолдана отырып, үздіксіз математикалық білім беру жүйесіндегі математикалық білімнің тұтастығын зерттейді. Зерттеудің мақсаты – планиметрия теоремаларын дәлелдеу және комплекс сандар алгебрасын стандартты емес және әртүрлі күрделіліктегі олимпиадалық есептерді шешудегі рөлін анықтау. Әдістеме планиметриялық есептерді шешу үшін комплекс сандар алгебрасын қолдануға негізделген, бұл оқушылардың математикаға деген қызығушылығын арттыруға және олардың танымдық белсенділігін, сыни және аналитикалық ойлауын дамытуға ықпал етеді.

Зерттеу нәтижелері комплекс сандар алгебрасы планиметрия есептерін шешуде шынымен тиімді екенін көрсетті. Мақалада комплекс сандар алгебрасының әдістерін қолдану әртүрлі есептерді шешуде тамаша нәтиже беретін мысалдар келтірілген. Осылайша мақала қазіргі білім беру қажеттіліктері мен математикалық білім беру талаптары контекстінде комплекс сандар алгебрасын зерттеудің маңыздылығы мен өзектілігін растайды.

Зерттеудің ғылым үшін маңыздылығы математиканы оқыту әдістемесін байыту болып табылады, әсіресе планиметрия саласында және комплекс сандар алгебрасын қолдану оқушылардың математикалық ұғымдарды түсінуін жақсартуға қалай ықпал ететінін көрсетеді. Сонымен қатар, зерттеу математиканың күнделікті өмірдегі және математикалық білім мен дағдылар қажет болатын әртүрлі кәсіптердегі рөлін растайды. Мақала математиканы терең зерттеу мен оның әдістерін білім мен практиканың әртүрлі салаларында қолданудың маңыздылығын көрсете отырып, білім мен қоғамның дамуына ықпал етеді.

Түйін сөздер: комплекс сандар, ортоцентр, инцентр, Эйлер формуласы, Эйлер түзуі, Симсон теоремасы.

Кіріспе

Қазіргі мектептегі білім беру бағдарламасында математика көбінесе формулаларды жаттауды ғана қажет ететін ғылым ретінде қабылданады, бұл мектеп оқушыларының да, жоғары оқу орындары студенттерінің де стандартты емес есептерді шығару мүмкіндіктерін шектейді. Геометрияның көптеген есептерін стандартты емес есептердің қатарына жатқызуға болады.

Евклид геометриясының есептерін шешу үшін нақты есеп пен оның шарттарына байланысты әртүрлі әдістер мен формулалар қолданылады [1-9]. Евклид геометриясындағы кең таралған әдістер:

1. Теоремалар мен олардың қасиеттері:

- Пифагор, Талес теоремалары;
- бұрыштардың, түзу кесінділерінің, көпбұрыштардың және шеңберлердің қасиеттері;
- бұрыштардың, теңбүйірлі үшбұрыштардың және тең қабырғалы үшбұрыштардың теңдігі.

2. Геометриялық құрылымдар:

- әртүрлі геометриялық фигураларды салуға арналған компас және сызғыш;
- ұқсас фигураларды салу үшін пропорцияларды пайдалану.

3. Геометриялық алгоритмдер:

- түзулер мен шеңберлердің қиылысын табу;
- әртүрлі геометриялық фигуралардың аудандарын есептеу.

4. Векторлық геометрия:

– үшбұрыштардың сегменттерінің ұзындығын, бұрыштарын және аудандарын есептеу үшін векторларды қолдану;

- векторлардың және теңбүйірлі үшбұрыштардың қозғалысына есептер шығару.

5. Координаттық геометрия:

- геометриялық фигуралардан алгебралық тендеулерге көшу;

– қашықтықтарды, бұрыштарды, қиылысу нүктелерін және т. б. табу үшін координаттарды пайдалану.

6. Комплекс сандарды қолдану:

– геометрия есептерін шешу үшін комплекс сандар алгебрасын қолдану;
– жазықтықтағы нүктелердің координаттарын көрсету және есептеу үшін комплекс сандарды қолдану.

Мысалы, Зиман өз мақаласында Евклидтік геометрияның теоремаларын комплекс проекциялық геометрия теоремаларына тура және кері тұжырымдауларды талқылайды: берілген екі нүктені шеңбердің шексіздік нүктелеріне қай кезде проекциялауға және Евклидтік геометрия әдістерін қолдануға болады? Мақалада нақты және күрделі сандар арасындағы айырмашылық пен Евклид геометриясын анықтау үшін нақты сандарды және проекциялық геометрияны анықтау үшін комплекс сандарды пайдаланудың салдары көрсетілген. Евклидтік геометрия нақты сандар өрісінде анықталады, ал проекциялық геометрия әрқашан алгебралық жабық сандар өрісінде болуы керек. Классикалық проекциялық геометрия әрқашан күрделі сандар өрісінде орын алған, бірақ қазіргі математикада бұл ережеден гөрі ерекшелік болып саналады. Мақала комплекс проекциялық теоремаларды дәлелдеудің тиімді әдістерін әзірлеу үшін нақты Евклид пен комплекс проекциялық геометрия арасындағы байланысты түсінудің маңыздылығын көрсетеді [10].

Мақаланың мақсаты комплекс сандар алгебрасының шешуші рөлі мен маңыздылығына баса назар аударатын отырып, стандартты емес және олимпиадалық есептерді қоса алғанда, күрделіліктің әртүрлі деңгейлеріндегі геометриялық теоремалардың дәлелдеуіндегі практикалық қолданылуын көрсету болып табылады. Мақала оқушылардың нақты өмірлік жағдайларда кездесетін әртүрлі талаптарға байланысты оқу барысында жан-жақты математикалық білімді меңгеруінің маңыздылығын көрсетеді. Комплекс сандарға алгебралық көзқарастың математикада және оның әртүрлі қолданбалы салаларында, әсіресе геометрияда, тригонометрияда, қозғалыс және ұқсастық теориясында, сонымен қатар механика мен физиканың әртүрлі есептерін шешуде үлкен маңызы бар.

Гипотеза оқушылардың логикалық ойлауын дамытып, математикаға деген қызығушылығын арттыру үшін оқу процесіне комплекс сандар алгебрасын оқытуды енгізу қажет. Бұл Евклид геометриясының есептерін шешуде комплекс сандар алгебрасын қолдануға мүмкіндік береді, оқушылардың логикалық ойлауын дамытуға және математикаға қызығушылығын арттыруға ықпал етеді. Сонымен қатар, комплекс сандарды планиметрия есептерін шешуде пайдалану олардың өмірде кеңінен қолданылатынын көрсетеді.

Зерттеу әдістемесі

Комплекс сандар аппаратымен жұмыс істеу дағдылы мектеп бағдарламасында қарастырыла бермейтін жаңа фактілерді анықтауға және оны жалпылауға мүмкіндік береді. Комплекс сандар аппаратын пайдалану көптеген мәселелерді шешуде айтарлықтай ілгерілеуге мүмкіндік береді. Нәтижесінде комплекс сандар математикада және оның қосымшаларында маңызды орын алады. Сондықтан әдістеме комплекс сандар алгебрасын планиметриялық есептерді шығаруда қолдануға негізделген, бұл оқушылардың математикаға қызығушылығын арттыруға және олардың танымдық белсенділігін, сыни және аналитикалық ойлауын дамытуға көмектеседі. Комплекс сандар алгебрасы мектептің міндетті оқу бағдарламасына кірмейді. Тек кейбір математикалық сыныптарда ғана элективті курс ретінде оқылады. Алайда комплекс сан ұғымы мектеп бағдарламасында қарастырылатын сан ұғымын жалпылау идеясын байытады және аяқтайды. Комплекс сандар аппараты әртүрлі геометриялық есептерді шешуде жақсы аналитикалық құрал болып табылады. Комплекс сандар әдісі планиметриялық есептерді дайын формулалар бойынша тікелей шешуге мүмкіндік береді. Сондықтан комплекс сандар аппаратын біршама алғашқы түсініктерді бере отырып, геометриялық есептерді шығаруда пайдаланайық.

I. Комплекс сандар алгебрасының алғашқы ұғымдары

Анықтама. $x + yi$ немесе $x + iy$ түріндегі өрнекті комплекс сан деп атайды, мұнда x және y нақты сандар, ал i таңбасы $i^2 = -1$ теңдігі орындалатындай жорамал бірлік. Сонда $z = x + iy$ теңдігі комплекс санның алгебралық түрде жазылуы деп аталады. Мұндағы x және y нақты сандары $z = x + iy$ комплекс санының сәйкесінше нақты және жорамал бөліктері деп аталады. Белгілеуі: $x = \operatorname{Re}(z)$, $y = \operatorname{Im}(z)$.

Комплекс сандар жиынында көбейту мен бөлу

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i,$$

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

теңдіктері арқылы анықталады.

Егер декарттық координаттар жүйесін қарастырсақ, евклид жазықтығындағы нүктелер мен олардың орнын анықтайтын комплекс сандар арасында бірімді сәйкестік орнатылады: $(x, y) \mapsto (x + iy)$.

$(x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$ теңдігі орындалатындай $\bar{z} = x - iy$ комплекс санын $z = x + iy$ комплекс санының түйіндесі деп атайды. Сонымен $z \cdot \bar{z} = |z|^2$, мұнда $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ және ол комплекс санның модулі деп аталады.

Егер евклид жазықтығында қайсыбір декарттық координаттар жүйесіне қатысты қарастырылатын $M(x, y)$ ағымдық нүктесін бас нүктемен қосатын болсақ, онда $\overrightarrow{OM}$ векторының координаттары да (x, y) болады. Демек ағымдық $\overrightarrow{OM}$ векторы мен комплекс сандар арасында бірімді сәйкестік орнатылады: $\overrightarrow{OM} \mapsto (x + iy)$.

Әрі қарай $\overrightarrow{OM}$ векторының нақты өстің оң бағытымен жасайтын бұрышын $\varphi = \arg z$ ($-\pi < \varphi \leq \pi$) арқылы белгілесек, онда комплекс санның алгебралық түрде жазылуынан оның тригонометриялық түрдегі жазылуын аламыз: $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ немесе $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, мұнда $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Комплекс санның тригонометриялық түрде жазылуынан оның көрсеткіштік түрде жазылуына көшу үшін $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ түріндегі Эйлер формуласын пайдаланамыз [2]. Сонда $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi) = |z|e^{i\varphi} = re^{i\varphi}$.

Үшбұрыш геометрияның базалық элементі болып табылады. Сондықтан үшбұрыштың төбелерін және оның тамаша нүктелерін комплекс сандармен өрнектеу арқылы планиметрияның көптеген есептерін комплекс сандар аппаратының көмегімен шешуге болады.

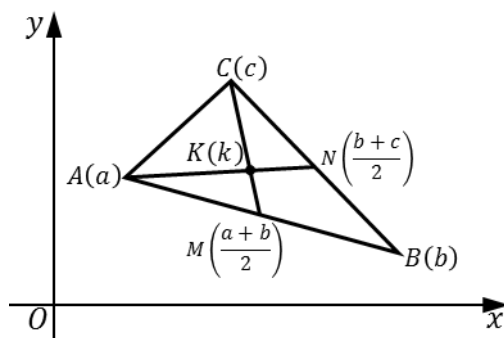
II. Үшбұрыштың тамаша нүктелерінің комплекстік координаттары

1. Үшбұрыштың ауырлық центрі. Үшбұрыштың ауырлық центрінің комплекстік координатасын табу үшін қайсыбір декарттық координаттар жүйесіне қатысты ABC үшбұрышын қарастырайық (1-сурет).

a, b, c арқылы үшбұрыштың сәйкес A, B, C төбелерінің комплекстік координаттарын белгілейік. Сонда үшбұрыштың K ауырлық центрінің комплекстік координатасы

$$k = \frac{a + b + c}{3} \quad (1)$$

болады [1].



1-сурет. Үшбұрыштың ауырлық центрі

2. Үшбұрыштың инцентрі. Үшбұрыштың бір I нүктесінде қиылысатын үш биссектрисасының I қиылысу нүктесінің g комплекстік координатасы [3]

$$g = \frac{BC \cdot a + AC \cdot b + AB \cdot c}{AB + BC + AC} \quad (2)$$

формуласы бойынша анықталады, мұнда AB, BC, AC – үшбұрыштың қабырғаларының ұзындықтары.

3. Үшбұрыштың ортоцентрі. Үшбұрыштың H ортоцентрінің h комплекстік координатасы

$$h = a + b + c - 2z_0 \quad (3)$$

теңдігі бойынша анықталады [3], мұнда z_0 – үшбұрышты сырттай сызылған шеңбердің центрінің комплекстік координатасы.

III. Евклид жазықтығындағы түзу мен шеңбердің комплекстік теңдеулері

Шеңбердің

$$a_{11}(x^2 + y^2) + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0 \quad (4)$$

түрінде берілген жалпы теңдеуін қарастырайық, мұнда a_{11} , a_1 , a_2 және a_0 нақты сандар. Одан әрі $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$, $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$ теңдіктерін пайдаланып, (4) шеңбердің

$$a_{11}z\bar{z} + (a_1 - ia_2)z + (a_1 + ia_2)\bar{z} + a_0 = 0 \quad (5)$$

түріндегі комплекстік теңдеуін аламыз. (5) теңдеуде $a_{11} = a$, $b = a_1 + ia_2$, $\bar{b} = a_1 - ia_2$, және $a_0 = c$ белгілеулерін енгізіп, шеңбердің жалпы комплекстік теңдеуін

$$azz\bar{z} + \bar{b}z + b\bar{z} + c = 0 \quad (6)$$

түрінде жазамыз, мұнда $a, c \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{C}$.

(6) теңдеуге қатысты екі жағдай қарастырамыз:

1) $a = 0$ дейік. Сонда

$$\bar{b}z + b\bar{z} + c = 0 \quad (7)$$

комплекстік теңдеуі түзудің жалпы теңдеуін анықтайды [2].

2) $a \neq 0$ дейік. Бұл жағдайда (6) теңдеу центрі $z_0 = -\frac{b}{a}$ нүктесінде, ал радиусы $R = \frac{\sqrt{|b|^2 - ac}}{a}$ тең $|z - z_0| = R$ түріндегі шеңберді анықтайды.

3) (7) теңдеуден $z_0 = -\frac{c}{\bar{b}}$ нүктесінен өтетін және $b = a_1 + ia_2$ комплекстік векторына перпендикуляр $z - z_0 = ibt$ түріндегі түзудің теңдеуі алынады, мұнда $t \in \mathbb{R}$.

4) Комплекс сандар жазықтығында берілген $M(z_1)$ және $N(z_2)$ нүктелері арқылы өтетін түзудің теңдеуі

$$\frac{z-z_1}{z_2-z_1} = \frac{\bar{z}-\bar{z}_1}{\bar{z}_2-\bar{z}_1} \text{ немесе } (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)z - (z_2 - z_1)\bar{z} + \bar{z}_1z_2 - z_1\bar{z}_2 = 0 \quad (8)$$

түрінде жазылады.

Сонымен z_1 және z_2 нүктелері арқылы өтетін түзудің теңдеуін қысқаша

$$\operatorname{Im} \frac{z-z_1}{z_2-z_1} = 0 \text{ немесе } \operatorname{Im} \frac{\bar{z}-\bar{z}_1}{\bar{z}_2-\bar{z}_1} = 0$$

түрінде жазуға болады.

5) Жазықтықта $l_1: \bar{b}_1z + b_1\bar{z} + c_1 = 0$ және $l_2: \bar{b}_2z + b_2\bar{z} + c_2 = 0$ комплекстік теңдеулері арқылы берілген екі түзудің арасындағы бұрыштың шамасы

$$\varphi = \arg \frac{b_2}{b_1} \quad (9)$$

теңдігі арқылы анықталады, мұнда $\varphi = (\angle l_1 l_2)$.

6) (9) теңдіктен l_1 және l_2 түзулерінің ортогоналдық және параллельдік шарттары шығады: $\frac{b_1}{b_2}$ қатынасы таза жорамал сан болғанда, яғни

$$\frac{b_1}{\bar{b}_1} = -\frac{b_2}{\bar{b}_2} \quad (10)$$

теңдігі орындалғанда және тек сонда ғана $l_1 \perp l_2$;

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{\bar{b}_1}{\bar{b}_2} \quad (11)$$

шарты орындалғанда және тек сонда ғана $l_1 \parallel l_2$.

Қорыта келгенде екі түзудің ортогоналдық шартын $\operatorname{Re} \left(\frac{b_1}{b_2} \right) = 0$, ал параллельдік шартын $\operatorname{Im} \left(\frac{b_1}{b_2} \right) = 0$ түрінде жазамыз.

7) z_1, z_2, z_3 үш комплекс сан берілсін дейік. Сонда

$$(z_1, z_2, z_3) := \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} \quad (12)$$

өрнегі осы сандардың жай қатынасы деп аталады. Демек $(z_1, z_2, z_3) := \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$ теңдігі орындалғанда және тек сонда ғана z_1, z_2 және z_3 нүктелері бір түзудің бойында жатады.

8) Егер әртүрлі z_1, z_2, z_3, z_4 төрт комплекс сан берілсе, онда

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) := \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4} \quad (13)$$

өрнегі осы сандардың екі еселі қатынасы деп аталады. $(z_1, z_2, z_3, z_4) = (\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3, \bar{z}_4)$ теңдігі орындалғанда және тек сонда ғана әртүрлі z_1, z_2, z_3, z_4 нүктелері бір түзудің немесе бір шеңбердің бойында жатады.

9) (8) теңдеуден бірлік шеңберге жүргізілген AB хордасының комплекстік теңдеуі

$$z + ab\bar{z} = a + b \quad (14)$$

теңдігі арқылы анықталады.

10) Комплекс сандар жазықтығында $M(z_0)$ нүктесінен $\bar{a}z + a\bar{z} + b = 0$ түзуіне дейінгі арақашықтық

$$d = \frac{|\bar{a}z_0 + a\bar{z}_0 + b|}{2|a|} \quad (15)$$

формуласы бойынша табылады.

11) Егер бірлік шеңбердің бойында жатқан $A(a)$ және $B(b)$ нүктелерінен шеңберге жанама жүргізілсе, онда олардың z_0 қиылысу нүктесінің комплекстік координатасы

$$z_0 = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

формуласы бойынша табылады.

12) Егер $|z| = 1$ бірлік шеңберінің бойында z_1, z_2, z_3, z_4 нүктелері орналасқан болса, онда $(z_1 z_2)$ және $(z_3 z_4)$ түзулерінің қиылысу нүктесінің z_0 комплекстік координатасы

$$z_0 = \frac{(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) - (\bar{z}_3 + \bar{z}_4)}{\bar{z}_1 \bar{z}_2 - \bar{z}_3 \bar{z}_4}$$

формуласы бойынша табылады.

13) $[z_1, z_2]$ ортаңғы перпендикуляр теңдеуі

$$z(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) + \bar{z}(z_2 - z_1) = |z_2|^2 - |z_1|^2$$

түрінде жазылады.

14) z_1, z_2, z_3 нүктелері арқылы өтетін шеңбердің центрі

$$\begin{aligned} z(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) + \bar{z}(z_2 - z_1) &= |z_2|^2 - |z_1|^2, \\ z(\bar{z}_3 - \bar{z}_2) + \bar{z}(z_3 - z_2) &= |z_3|^2 - |z_2|^2 \end{aligned}$$

теңдеулер жүйесінен табылады.

15) $|z| = 1$ бірлік шеңберінің бойында жататын $A(a)$, $B(b)$ және $D(d)$ нүктелері берілсін дейік. $D(d)$ нүктесінен AB түзуіне перпендикуляр түсірілген. Сонда перпендикулярдың табанының z комплекстік координатасы

$$z = \frac{(a + b + d - ab\bar{d})}{2}$$

теңдігінен анықталады.

IV. Комплекс сандар аппаратының қолданысы

Комплекс сандардың ұтымдылығы неғұрлым айқын көрінетін келесі теоремаларды қарастырайық.

1. Эйлер теоремасы. Үшбұрышты іштей және сырттай сызылған шеңберлердің центрлерінің арақашықтығы $d^2 = R^2 - 2Rr$ формуласы бойынша анықталады, мұнда R – үшбұрышты сырттай сызылған шеңбердің радиусы, ал r – іштей сызылған шеңбердің радиусы.

Дәлелдеуі. $I(g)$ арқылы үшбұрыштың инцентрін, ал $Q(z_0)$ арқылы үшбұрышты сырттай сызылған шеңбердің центрін белгілейік. Сонда IQ – ізделініп отырған арақашықтық.

Комплекс сандар жазықтығында кез келген екі нүктенің арақашықтығы координаттар жүйесінің қалай алынғанына тәуелсіз.

Қайсыбір декарттық координаттар жүйесіне қатысты ABC үшбұрышын сырттай сызылған $|z - z_0| = R$ шеңбері берілсін дейік. Әрі қарай декарттық координаттар жүйесін өзіне-өзін параллель жылжыта отырып $Q(z_0)$ нүктесіне көшірейік. Сонда $|AQ| = |BQ| = |CQ| = R$.

Келесі қадамда $\vec{QI}$ векторының комплекстік координатасын және ұзындығын табамыз.

$\vec{QI} = \{g - z_0\} = g$, өйткені жаңа координаттар жүйесінде $z_0 = 0$. Демек

$$\begin{aligned} d^2 &= |\overrightarrow{QI}|^2 = g \cdot \bar{g} = \left(\frac{BC}{2p}a + \frac{AC}{2p}b + \frac{AB}{2p}c \right) \cdot \left(\frac{BC}{2p}\bar{a} + \frac{AC}{2p}\bar{b} + \frac{AB}{2p}\bar{c} \right) \\ &= \frac{1}{2p} (BC|a|^2 + AC|b|^2 + AB|c|^2 - AB \cdot AC \cdot BC) \\ &= \frac{1}{2p} ((AB + AC + BC)R^2 - AB \cdot AC \cdot BC) = R^2 - \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{2p} = R^2 - \frac{4S_{ABC}}{2p} R \\ &= R^2 - 2Rr, \end{aligned}$$

мұнда $p = \frac{AB+AC+BC}{2}$ – жарты периметр, g – инцентрдің комплекстік координатасы және $S_{ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4R}$, $S_{ABC} = p \cdot r - ABC$ үшбұрышының ауданы. Сонымен теорема дәлелденді.

2. Эйлер түзуі. Кез келген үшбұрышта $Q(z_0)$ сырттай сызылған шеңбердің центрі, $K(k)$ ауырлық центрі және $H(h)$ ортоцентрі бір түзудің бойында жатады [3]. Сонымен қатар $\overrightarrow{QK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{KH}$.

Дәлелдеуі. $K(k)$ ауырлық центрі мен $H(h)$ ортоцентрі арқылы өтетін түзудің теңдеуін жазайық:

$$(KH): \begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ \frac{a+b+c}{3} & \frac{\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}}{3} & 1 \\ a+b+c-2z_0 & \bar{a}+\bar{b}+\bar{c}-2\bar{z}_0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Егер үшбұрышты сырттай сызылған шеңбердің центрі осы түзудің бойында жататын болса, онда оның z_0 комплекстік координатасы да осы теңдеуді қанағаттандырады. Тексерейік:

$$\begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ \frac{a+b+c}{3} & \frac{\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}}{3} & 1 \\ a+b+c-2z_0 & \bar{a}+\bar{b}+\bar{c}-2\bar{z}_0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ \frac{a+b+c}{3} & \frac{\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}}{3} & 1 \\ a+b+c & \bar{a}+\bar{b}+\bar{c} & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Демек үшбұрыштың үш тамаша нүктесі бір түзудің бойында жатады.

Енді теореманың екінші бөлігін, яғни $\overrightarrow{QK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{KH}$ векторлық теңдігін дәлелдейік.

$$\overrightarrow{QK} = \{k - z_0\} = \left\{ \frac{a+b+c}{3} - z_0 \right\} = \left\{ \frac{a+b+c-3z_0}{3} \right\}.$$

Бұл – $\overrightarrow{QK}$ векторының комплекстік координатасы.

Әрі қарай $\overrightarrow{KH}$ векторының комплекстік координатасын табамыз:

$$\overrightarrow{KH} = \{h - k\} = \left\{ a + b + c - 2z_0 - \frac{a+b+c}{3} \right\} = \left\{ \frac{2a+2b+2c-6z_0}{3} \right\}.$$

Бұдан $\overrightarrow{QK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{KH}$ векторлық теңдігі шығады.

Эйлер шығармашылығы бүкіл адамзаттың меншігіне айналған данышпандардың қатарына жатады. Ұлы Гаусс Эйлердің жазбаларын зерттеу әрқашан математиканы үйренудің ең жақсы құралы болатынын атап өтті. Тағы бір ұлы ғалым Эйлер туралы „ол ортақ ұстаз“ деді.

3. Симсон теоремасы. ABC үшбұрышын сырттай сызылған шеңбердің бойынан алынған кез келген M нүктесінен оның қабырғаларына (немесе созындыларына) түсірілген перпендикулярдың табандары бір түзудің бойында жатады. Бұл түзу Симсон түзуі деп аталады.

Дәлелдеуі. $|z - z_0| = R$ теңдеуі ABC үшбұрышын сырттай сызылған шеңбердің теңдеуі дейік. Теореманың дәлелдеуін қысқарту мақсатында $Q(z_0)$ координаттар бас нүктесі, ал $R = 1$ делік. Сонда үшбұрыштың $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ төбелері $|z| = 1$ бірлік шеңберінің бойында жатады. $A_1(a_1)$, $B_1(b_1)$, $C_1(c_1)$ нүктелері – шеңбердің бойынан алынған кез келген $M(m)$ нүктесінен сәйкесінше BC , AC , AB түзулеріне түсірілген ортогональ проекциялары. A_1 , B_1 , C_1 нүктелерінің сәйкес комплекстік координаттары

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2} \left(b + c + m - \frac{bc}{m} \right), \\ b_1 &= \frac{1}{2} \left(a + c + m - \frac{ac}{m} \right), \\ c_1 &= \frac{1}{2} \left(a + b + m - \frac{ab}{m} \right) \end{aligned}$$

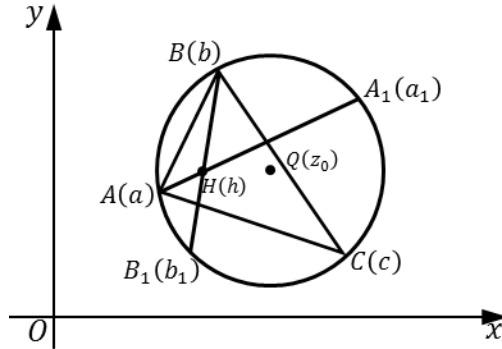
теңдіктері арқылы анықталады. Бұдан

$$\frac{a_1 - c_1}{b_1 - c_1} = \left(c - a + \frac{ab - bc}{m} \right) : \left(c - b + \frac{ab - ac}{m} \right) = \frac{(c - a)(m - b)}{(c - b)(m - a)} = \frac{\bar{a}_1 - \bar{c}_1}{\bar{b}_1 - \bar{c}_1}$$

теңдігі шығады. Соңғы теңдік A_1 , B_1 , C_1 нүктелерінің коллинеарлық шартын білдіреді. Демек бұл нүктелер Симсон түзуінің бойында жатады.

Ортоцентрдің комплекстік координатасы

ABC үшбұрышында $H(h)$ ортоцентрінің h комплекстік координатасын үшбұрыштың төбелерінің комплекстік координаттары арқылы өрнектеңіз (2-сурет).



2-сурет. Ортоцентрдің комплекстік координатасын анықтауға

Шешуі. Комплекс сандар жазықтығында бір түзудің бойында жатпайтын A , B және C нүктелері арқылы $|z - z_0| = R$ шеңберін жүргізейік, мұнда z_0 комплекс саны шеңбердің центрінің, яғни Q нүктесінің комплекстік координатасы.

Үшбұрыштың AN_1 және BN_2 биіктіктерінің қиылысу нүктесі $H(h)$ ортоцентрді анықтайды. Демек $H = (AA_1) \times (BB_1)$, мұнда $A_1(a_1)$, $B_1(b_1)$, нүктелері – AN_1 , BN_2 биіктіктерінің созындылары $|z - z_0| = R$ шеңберімен қиылысқанда пайда болатын нүктелер.

Бұл нүктелердің $|z - z_0| = R$ шеңберінің бойында жататыны $|a_1 - z_0| = R$ және $|b_1 - z_0| = R$ теңдіктері арқылы анықталады.

Алдымен (AA_1) және (BB_1) түзулерінің комплекстік теңдеулерін табайық. Ол үшін келесі түсініктемелерді қарастырамыз.

Үш нүктенің коллинеарлық шарты. A , B , C нүктелерінің коллинеарлығы $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{AC}$ векторларының

$$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \frac{a - b}{a - c} = \frac{\bar{a} - \bar{b}}{\bar{a} - \bar{c}}$$

коллинеарлық шарты бойынша анықталады. Демек $A(a)$, $B(b)$ және $C(c)$ нүктелерінің бір түзуге тиістілігі

$$(a - b)(\bar{a} - \bar{c}) = (a - c)(\bar{a} - \bar{b})$$

немесе

$$a(\bar{b} - \bar{c}) + b(\bar{c} - \bar{a}) + c(\bar{a} - \bar{b}) = 0 \quad (16)$$

комплекттік теңдігі арқылы анықталады.

Үшінші ретті анықтауыштың көмегімен (16) теңдікті

$$\begin{vmatrix} a & \bar{a} & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \\ c & \bar{c} & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (17)$$

түрінде жазайық.

Енді комплекс сандар жазықтығында $A(a)$ және $B(b)$ нүктелерін бекітейік те, $C(c)$ нүктесін $A(a)$ және $B(b)$ нүктелерін қосатын түзудің бойында $C(z)$ айнымалы нүкте деп санайық. Сонда (AB) түзуінің комплекстік теңдеуі (16) және (17) теңдіктері арқылы

$$(\bar{a} - \bar{b})z + (b - a)\bar{z} + a\bar{b} - b\bar{a} = 0 \quad (18)$$

немесе

$$\begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ a & \bar{a} & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (19)$$

түрінде анықталады. Сонда (AA_1) және (BB_1) түзулерінің комплекстік теңдеулері

$$(\bar{a} - \bar{a}_1)z + (a_1 - a)\bar{z} + a\bar{a}_1 - \bar{a}a_1 = 0, \quad (20)$$

$$(\bar{b} - \bar{b}_1)z + (b_1 - b)\bar{z} + b\bar{b}_1 - \bar{b}b_1 = 0 \quad (21)$$

түрінде жазылады.

Ескерту. (AA_1) және (BB_1) түзулерін $|z - z_0| = R$ шеңберіне жүргізілген қиюшылар деп те атайды.

Келесі қадамда (AA_1) және (BB_1) түзулерінің комплекстік теңдеулерін ABC үшбұрышын сырттай сызылған $|z - z_0| = R$ шеңберінің центрінің z_0 комплекстік координатасымен байланыстырайық.

Есептің шарты бойынша $A_1(a_1)$, $B_1(b_1)$ нүктелері шеңбердің бойында жатады. Демек $|a - z_0| = R$, $|a_1 - z_0| = R$ және $|b - z_0| = R$, $|b_1 - z_0| = R$ теңдіктері орындалады. Сонымен (AA_1) түзуі үшін

$$|a - z_0| = R \Leftrightarrow (a - z_0)(\bar{a} - \bar{z}_0) = R^2 \text{ және } |a_1 - z_0| = R \Leftrightarrow (a_1 - z_0)(\bar{a}_1 - \bar{z}_0) = R^2$$

теңдіктері орын алады. Бұл теңдіктерден

$$\bar{a} - \bar{z}_0 = \frac{R^2}{a - z_0}, \quad \bar{a}_1 - \bar{z}_0 = \frac{R^2}{a_1 - z_0}, \quad \bar{a} - \bar{a}_1 = R^2 \frac{a_1 - a}{(a - z_0)(a_1 - z_0)}$$

арақатынастарын табамыз.

Әрі қарай (20) теңдіктен (AA_1) түзуінің бос мүшесін түрлендірейік:

$$\begin{aligned} a\bar{a}_1 - \bar{a}a_1 &= a \left(\bar{z}_0 + \frac{R^2}{a_1 - z_0} \right) - \left(\bar{z}_0 + \frac{R^2}{a - z_0} \right) a_1 = \\ &= (a - a_1)\bar{z}_0 + R^2 \left(\frac{a}{a_1 - z_0} - \frac{a_1}{a - z_0} \right) = (a - a_1)\bar{z}_0 + R^2 \frac{(a - a_1)(a + a_1 - z_0)}{(a_1 - z_0)(a - z_0)}. \end{aligned}$$

Соңғы түрлендірулерден кейін (AA_1) түзуінің (20) теңдеуі

$$R^2 \frac{a_1 - a}{(a - z_0)(a_1 - z_0)} z + (a_1 - a)\bar{z} = (a_1 - a)\bar{z}_0 + R^2 \frac{(a_1 - a)(a + a_1 - z_0)}{(a - z_0)(a_1 - z_0)}$$

немесе

$$z + \frac{(a - z_0)(a_1 - z_0)}{R^2} \bar{z} = \frac{(a - z_0)(a_1 - z_0)}{R^2} \bar{z}_0 + (a + a_1 - z_0) \quad (22)$$

түрінде жазылады. (BB_1) түзуінің теңдеуі де осыған ұқсас

$$z + \frac{(b - z_0)(b_1 - z_0)}{R^2} \bar{z} = \frac{(b - z_0)(b_1 - z_0)}{R^2} \bar{z}_0 + (b + b_1 - z_0) \quad (23)$$

түрінде табылады.

Есептің шарты бойынша $H = (AA_1) \times (BB_1)$, онда $h \in (AA_1)$ және $h \in (BB_1)$. Демек ортоцентрдің h комплекстік координатасы

$$\begin{cases} h + \frac{(a - z_0)(a_1 - z_0)}{R^2} \bar{h} = \frac{(a - z_0)(a_1 - z_0)}{R^2} \bar{z}_0 + (a + a_1 - z_0), \\ h + \frac{(b - z_0)(b_1 - z_0)}{R^2} \bar{h} = \frac{(b - z_0)(b_1 - z_0)}{R^2} \bar{z}_0 + (b + b_1 - z_0) \end{cases}$$

жүйесінен анықталады. Бірінші теңдіктен екінші теңдікті мүшелеп шегерсек

$$\bar{h} = \bar{z}_0 + \frac{a + a_1 - b - b_1}{(a - z_0)(a_1 - z_0) - (b - z_0)(b_1 - z_0)} R^2. \quad (24)$$

(24) теңдікті одан әрі түрлендіру үшін бұл теңдіктің құрамына үшбұрыштың C төбесінің c комплекстік координатасын қосу қажет. Ол үшін түзулердің перпендикулярлық шарттарын пайдаланамыз.

$$(AA_1) \perp (BC) \Leftrightarrow (a - z_0)(a_1 - z_0) = -(b - z_0)(c - z_0),$$

$$(BB_1) \perp (AC) \Leftrightarrow (b - z_0)(b_1 - z_0) = -(a - z_0)(c - z_0).$$

Осы теңдіктердің көмегімен (24) теңдіктің құрамына кіретін өрнектерді ықшамдап алайық:

$$(a - z_0)(a_1 - z_0) - (b - z_0)(b_1 - z_0) = (c - z_0)(a - z_0 - b + z_0) = (a - b)(c - z_0);$$

$$a_1 - b_1 = (a_1 - z_0) - (b_1 - z_0) = \frac{(a - z_0)(c - z_0)}{b - z_0} - \frac{(b - z_0)(c - z_0)}{a - z_0} = (c - z_0) \frac{(a - b)(a + b - 2z_0)}{(a - z_0)(b - z_0)}.$$

Сонда (24) теңдік

$$\begin{aligned}\bar{h} &= \bar{z}_0 + \frac{a + a_1 - b - b_1}{(a - z_0)(a_1 - z_0) - (b - z_0)(b_1 - z_0)} R^2 = \bar{z}_0 + \frac{a - b}{(a - b)(c - z_0)} R^2 + \\ &+ (c - z_0) \frac{(a - b)(a + b - 2z_0)}{(a - z_0)(b - z_0)} \cdot \frac{R^2}{(a - b)(c - z_0)} = \bar{z}_0 + \frac{R^2}{c - z_0} + \\ &+ \frac{a + b - 2z_0}{(a - z_0)(b - z_0)} R^2 = \bar{z}_0 + \frac{R^2}{c - z_0} + \frac{R^2}{a - z_0} + \frac{R^2}{b - z_0}\end{aligned}$$

түрінде жазылады. Соңғы теңдіктен оның түйіндесіне көшсек,

$$h = z_0 + \frac{R^2}{\bar{c} - \bar{z}_0} + \frac{R^2}{\bar{a} - \bar{z}_0} + \frac{R^2}{\bar{b} - \bar{z}_0} = z_0 + c - z_0 + a - z_0 + b - z_0 = a + b + c - 2z_0$$

Сонымен

$$h = a + b + c - 2z_0 \quad (25)$$

түріндегі **авторлық формула** алынды. Бұл формуланың көмегімен алда талай қызықты тамаша есептерді шығаруға болады.

1-мысал. Төбелерінің комплекстік координаттары берілген ABC үшбұрышын сырттай сызылған шеңбердің $Q(z_0)$ центрінен оның $H(h)$ ортоцентріне дейінгі арақашықтықты тап.

Шешуі. a, b, c және z_0 комплекс сандары A, B, C және Q нүктелерінің сәйкес комплекстік координаттары (2-суретті қараңыз).

(25) формуланың көмегімен $\overrightarrow{QH}$ векторының комплекстік координатасын анықтайық

$$\overrightarrow{QH} = \{h - z_0\} = \{a + b + c - 3z_0\}.$$

Онда ізделініп отырған QH арақашықтығы

$$\begin{aligned}QH^2 &= (h - z_0) \cdot (\bar{h} - \bar{z}_0) = (a + b + c - 3z_0)(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} - 3\bar{z}_0) = \\ &= [(a - z_0) + (b - z_0) + (c - z_0)] \cdot [(\bar{a} - \bar{z}_0) + (\bar{b} - \bar{z}_0) + (\bar{c} - \bar{z}_0)] = \\ &= (a - z_0)(\bar{a} - \bar{z}_0) + (b - z_0)(\bar{b} - \bar{z}_0) + (c - z_0)(\bar{c} - \bar{z}_0) = \\ &+ (a - z_0)(\bar{b} - \bar{z}_0) + (\bar{a} - \bar{z}_0)(b - z_0) + (a - z_0)(\bar{c} - \bar{z}_0) + (\bar{a} - \bar{z}_0)(c - z_0) + \\ &+ (b - z_0)(\bar{c} - \bar{z}_0) + (\bar{b} - \bar{z}_0)(c - z_0) = \\ &= |a - z_0|^2 + |b - z_0|^2 + |c - z_0|^2 + 2(\overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QC} + \overrightarrow{QB} \cdot \overrightarrow{QC}) = \\ &= 3R^2 + 2R^2(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma). \\ QH^2 &= 3R^2 + 2R^2(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) \quad (26)\end{aligned}$$

теңдігі арқылы табылады. Табылған (26) арақашықтықты үшбұрыштың қабырғалары арқылы өрнектеу үшін косинустар теоремасын пайдаланамыз.

$$\begin{aligned}\triangle AQB &\Rightarrow AB^2 = AQ^2 + BQ^2 - 2AQ \cdot BQ \cos\alpha = 2R^2(1 - \cos\alpha), \\ \triangle BQC &\Rightarrow BC^2 = BQ^2 + CQ^2 - 2BQ \cdot CQ \cos\beta = 2R^2(1 - \cos\beta), \\ \triangle CQA &\Rightarrow AC^2 = CQ^2 + AQ^2 - 2CQ \cdot AQ \cos\gamma = 2R^2(1 - \cos\gamma).\end{aligned}$$

Алынған үш теңдікті мүшелеп қоссақ,

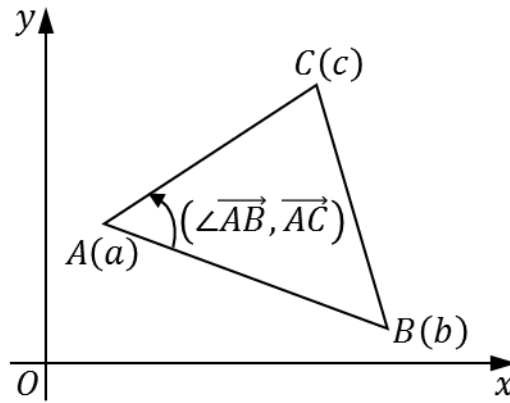
$$2R^2(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) = 6R^2 - (AB^2 + BC^2 + AC^2)$$

түріндегі теңдікті аламыз. Демек ортоцентрден үшбұрышты сырттай сызылған шеңбердің центріне дейінгі арақашықтық

$$QH^2 = 9R^2 - (AB^2 + BC^2 + AC^2) \quad (27)$$

формуласы бойынша табылады.

2-мысал. Комплекс сандар жазықтығында төбелері $A(a)$, $B(b)$ және $C(c)$ нүктелерінде орналасқан ABC үшбұрышының ауданын табыңыз (3-сурет).



3-сурет. ABC үшбұрышының ауданын табуға

Шешуі. Егер үшбұрыштың екі қабырғасы және арасындағы бұрышы белгілі болса, онда үшбұрыштың ауданын

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \sin(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$$

формуласы бойынша табамыз. Есептің шарты бойынша үшбұрыштың төбелерінің комплекстік координаттары берілген. Демек $b - a$ және $c - a$ комплекс сандары $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{AC}$ векторларының сәйкес комплекстік координаттары болады. Сонда $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{AC}$ векторларының арасындағы бұрыш

$$(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \arg(c - a) - \arg(b - a) = \arg \frac{c - a}{b - a}$$

теңдігі арқылы анықталады.

Енді осы бұрыштың $\sin(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$ табу үшін $\sin(\arg z) = \frac{z - \bar{z}}{2i|z|}$ формуласын пайдаланайық, сонда

$$\begin{aligned} \sin(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) &= \sin\left(\arg \frac{c - a}{b - a}\right) = \frac{\frac{c - a}{b - a} - \frac{\bar{c} - \bar{a}}{\bar{b} - \bar{a}}}{2i \left| \frac{c - a}{b - a} \right|} = \\ &= \frac{(c - a)(\bar{b} - \bar{a}) - (b - a)(\bar{c} - \bar{a})}{2|b - a|^2 \left| \frac{c - a}{b - a} \right|} = \frac{(c - a)(\bar{b} - \bar{a}) - (b - a)(\bar{c} - \bar{a})}{2iAB \cdot AC}. \end{aligned}$$

Демек ізделініп отырған ABC үшбұрышының ауданын

$$S_{ABC} = \frac{1}{4i} \left((c - a)(\bar{b} - \bar{a}) - (\bar{c} - \bar{a})(b - a) \right) \quad (28)$$

немесе

$$S_{ABC} = \frac{i}{4} \left(a(\bar{b} - \bar{c}) + b(\bar{c} - \bar{a}) + c(\bar{a} - \bar{b}) \right) \quad (29)$$

формулаларының бірімен табуға болады. (29) формуланы үшінші ретті анықтауыштың көмегімен

$$S_{ABC} = \frac{i}{4} \begin{vmatrix} a & \bar{a} & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \\ c & \bar{c} & 1 \end{vmatrix} \quad (30)$$

түрінде жазуға болады.

Кез келген үшбұрыштың ауданын оның қабырғалары арқылы өрнектеуге болады.

Теорема. Үшбұрыштың ауданы үшбұрышты сырттай сызылған шеңбердің R радиусы мен оның қабырғалары арқылы

$$S_{ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot CA}{4R} \quad (31)$$

формуласы бойынша табылады.

Дәлелдеуі. Егер a, b, c және z_0 арқылы A, B, C және Q нүктелерінің сәйкес комплекстік координаттарын белгілесек ABC үшбұрышының ауданын (29) формуласымен табуға болады:

$$S_{ABC} = \frac{i}{4} \left(a(\bar{b} - \bar{c}) + b(\bar{c} - \bar{a}) + c(\bar{a} - \bar{b}) \right).$$

Бұл формуланың құрамына үшбұрышты сырттай сызылған шеңбердің R радиусын кіргізу үшін (29) теңдікті келесі түрде түрлендіреміз:

$$S_{ABC} = \frac{i}{4} \left[a \left((\bar{b} - \bar{z}_0) - (\bar{c} - \bar{z}_0) \right) + b \left((\bar{c} - \bar{z}_0) - (\bar{a} - \bar{z}_0) \right) + c \left((\bar{a} - \bar{z}_0) - (\bar{b} - \bar{z}_0) \right) \right]. \quad (32)$$

Үшбұрышты сырттай сызылған шеңбердің теңдеуі $|z - z_0| = R$ немесе $(z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) = R^2$ түрінде жазылады. Демек

$$\bar{a} - \bar{z}_0 = \frac{R^2}{a - z_0}, \quad \bar{b} - \bar{z}_0 = \frac{R^2}{b - z_0}, \quad \bar{c} - \bar{z}_0 = \frac{R^2}{c - z_0}.$$

Табылған өрнектерді (32) теңдікке қойып ықшамдағаннан кейін, ABC үшбұрышының ауданын табатын

$$S_{ABC} = \frac{i}{4} R^2 \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a-z_0)(b-z_0)(c-z_0)} \quad (33)$$

авторлық формуласын аламыз. Енді осы формуланың көмегімен (31) формуланы дәлелдейік. Ол үшін (33) теңдіктен оның түйіндесіне көшеміз:

$$\bar{S}_{ABC} = -\frac{i}{4} R^2 \frac{(\bar{a} - \bar{b})(\bar{b} - \bar{c})(\bar{c} - \bar{a})}{(\bar{a} - \bar{z}_0)(\bar{b} - \bar{z}_0)(\bar{c} - \bar{z}_0)}.$$

Түйіндес комплекс сандардың көбейтіндісі сол комплекс санның модулінің квадратына тең, яғни

$$S_{ABC} \cdot \bar{S}_{ABC} = |S_{ABC}|^2.$$

Олай болса

$$\begin{aligned} |S_{ABC}|^2 &= \frac{1}{16} R^4 \frac{(a-b)(\bar{a}-\bar{b})(b-c)(\bar{b}-\bar{c})(c-a)(\bar{c}-\bar{a})}{(a-z_0)(\bar{a}-\bar{z}_0)(b-z_0)(\bar{b}-\bar{z}_0)(c-z_0)(\bar{c}-\bar{z}_0)} = \\ &= \frac{1}{16} \frac{AB^2 \cdot BC^2 \cdot CA^2}{R^6} R^4 = \frac{1}{16} \frac{AB^2 \cdot BC^2 \cdot CA^2}{R^2}, \end{aligned}$$

өйткені $(a-b)(\bar{a}-\bar{b}) = AB^2$ және $(a-z_0)(\bar{a}-\bar{z}_0) = R^2$. Бұдан

$$|S_{ABC}| = \frac{AB \cdot BC \cdot CA}{4R}.$$

Теорема дәлелденді.

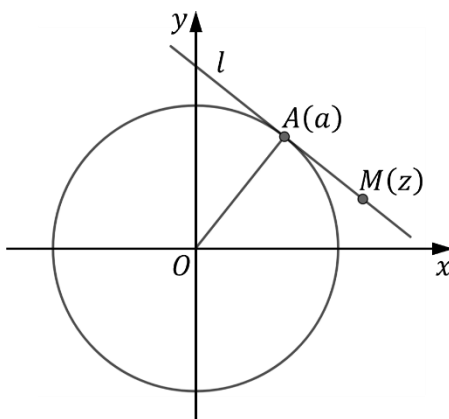
Ескерту. Стандартты мектеп бағдарламасында қабылданған белгілеулерге көшсек, (31) формула

$$S_{ABC} = \frac{abc}{4R}$$

түрінде жазылады, мұнда $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$.

Шеңберге жүргізілген жанаманың теңдеуі

Комплекс сандар жазықтығында комплекстік координатасы a болатын $A(a)$ нүктесі берілсін дейік (4-сурет).



3.2-сурет. Шеңберге жүргізілген жанама

Осы нүкте арқылы өтетін және осы нүктенің $\overrightarrow{OA}$ радиус-векторына перпендикуляр l түзуінің теңдеуін табайық. $M(z)$ нүктесі l түзуінің бойынан алынған ағымдық нүкте болсын. Есептің шарты бойынша $\overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{OA}$, демек l – жанама түзу. $\overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{OA}$ шарты

$$\bar{a}(z - a) + a(\bar{z} - \bar{a}) = 0 \text{ немесе } \bar{a}z + a\bar{z} = 2|a|^2 \quad (34)$$

түріндегі ізделініп отырған l жанама түзуінің комплекстік теңдеуін анықтайды.

Зерттеу нәтижелері

Алынған нәтижелер геометрия есептерін шешуде комплекс сандарды қолданып шешу процесін жеңілдететінін және элегантты шешімдерге қол жеткізуге мүмкіндік беретінін көрсетеді. Бұл оқушылардың ой-өрісін дамытуға септігін тигізіп, математикалық есептерді шығарудың стандартты емес тәсілдерін табуға қызығушылығын оятады. Геометрияда күрделі сандарды қолдану оқушылардың шығармашылық ойлауын, математикаға деген құштарлығын оятып, жаңа мүмкіндіктер ашады.

Келесі кезекте зерттеу нәтижелерін атап өтейік [13]:

1) үшбұрыштың ауырлық центрінің, үшбұрыштың инцентрінің және үшбұрыштың ортоцентрінің комплекстік координаттары анықталды. Үшбұрыштың ортоцентрін табуда авторлық формула алынды;

2) Эйлер формуласы мен Эйлер түзуінің авторлық дәлелдеуі көрсетілді;

3) үшбұрыштың ауданын оның қабырғалары арқылы өрнектейтін Герон формуласы комплекс сандар аппаратының көмегімен дәлелденді.

Талқылау

Евклид геометриясының есептері әртүрлі болуы мүмкін және олардың әрқайсысының шешімі есептің шарттары мен белгілі деректеріне байланысты сәйкес әдістер мен формулаларды таңдауды талап етеді. Бұл Евклид геометриясын математиканың қызықты және алуан түрлі саласына айналдырады. Оны зерттеу логикалық ойлауды дамытуға және математикалық білімді практикалық жағдайларда қолдануға ықпал етеді.

Евклид геометриясының есептерін шығаруда комплекс сандар алгебрасын қолдану шешу процесін жеңілдетеді және оқушылардың логикалық ойлауын дамытуға ықпал етеді. Сонымен қатар, комплекс сандарды қолдану олардың нақты өмірде кеңінен қолданылуын көрсетеді.

Суливан өз мақаласында анықтамаларды жеңілдету және интуитивті пайымдаулар арқылы есептерді шешуге стандартты емес тәсілдің артықшылықтарын көрсетеді. Дегенмен, ол сонымен қатар стандартты емес материалды меңгеруге уақыттың шектеулі болуы және мектеп оқушылары мен студенттердің дәстүрлі оқу курсына өтудегі мүмкін қиындықтары сияқты кейбір ықтимал кемшіліктерді көрсетеді. Сондай-ақ, оқытушылардың осы тәсілді қолдана отырып, курсты сәтті оқыту үшін стандартты емес талдау бойынша білімге ие болуының маңыздылығы атап өтіледі [11, 14].

Нунокава математика сабақтарындағы мәселелерді шешудің әртүрлі тәсілдерін және олардың оқушылардың оқуына әсерін талқылайды. Ол сондай-ақ студенттерге шынайы мәселелерді шешу тәжірибесін қамтамасыз ету үшін мұғалімнің жағдайларды таңдауы мен проблемаларды шешуге араласуының маңыздылығын атап көрсетеді. Сонымен қатар мақалада математикалық мәдениет контекстіндегі мәселелерді шешуге көзқарастың шектеулері талқыланады [12].

Мектеп оқушыларымен және студенттермен жұмыс тәжірибесін ескере отырып, авторлар Суливан мен Нунокаваның балаларды математикаға баулу үшін мектеп бағдарламасында олар тек математикалық есептерді шешу үшін ғана емес, сонымен қатар механика, физика және басқа да көптеген салалардағы есептерді шешуде қолдана алатындай талдау және есептерді шешудің стандартты емес әдістерін қолдану қажет деген пікірімен келіседі. Eren K., Ersoy S., Pennestri E. мақаласы екі буынды механизмдердің лездік кинематикасын зерттеуге бағытталған. Ол комплекс сандар аппаратына негізделген. Лездік инварианттар комплекс сандар түрінде қисықтық теориясына қолданылады [15].

Қорытынды

Комплекс сандар аппараты планиметрияның есептерін шешуде ең ұтымды құралдардың бірі болып табылады. Сонымен қатар бір қарағанда комплекс сандарға қатысы жоқ тұжырымдарды да дәлелдеуге мүмкіндік береді.

Комплекс сандар алгебрасының әдістерін қолдану мектеп оқушылары мен студенттердің математика туралы түсініктерін байытады, олардың концептуалды түсінігін, пайымдау дағдыларын және аналитикалық ойлауын дамытуға ықпал етеді. Планиметрияда комплекс сандарды қолдану қолжетімді формулаларды пайдалана отырып, есептерді шешудің тікелей жолын ұсынады.

Өмірлік жағдайларда кездесетін әртүрлі талаптарға байланысты оқушылардың оқу барысында математиканы жан-жақты және берік түсінуі маңызды.

Комплекс сандардың алгебралық жүйесінің математикада және оның әртүрлі қолданбалы салаларында, әсіресе геометрияда, тригонометрияда, қозғалыс және ұқсастық теориясында, сонымен қатар механика мен физиканың әртүрлі есептерін шешуде үлкен маңызы бар. Осы саладағы зерттеулердің перспективалары математика мен ғылымның әртүрлі салаларында комплекс сандар алгебрасын қолдану мәселесін одан әрі зерттеуді қамтуы мүмкін.

Бұл тақырыпты зерттеу математикалық мәдениетті арттыруға; сан ұғымы туралы түсінікті тереңдетуге; математиканың ғылым ретіндегі бірлігі туралы түсініктерді одан әрі дамытуға бағытталған. Біздің зерттеуіміз тіпті жазықтықтағы евклид кеңістігінің өзінде жаңа тақырыптарды табуға болатынын көрсетті.

Мақала төрт саланы қамтиды – сызықтық алгебра, векторлық алгебра, аналитикалық алгебра және комплекс сандар алгебрасы. Осы салаларды біріктіре отырып планиметрияның тамаша нүктелерінің (инцентр, ауырлық центрі, ортоцентр, үшбұрышты іштей және сырттай сызылған шеңбердің центрі) комплекстік координаттары мен түзулерінің (Эйлер түзулері, шеңберге жүргізілген жанама түзу) комплекстік теңдеулерін бас нүктесі кез келген нүктеде орналасқан декарттық координаттар жүйесіне қатысты анықтау жолы көрсетілді. Жұмыс барысында бірнеше авторлық формулалар алынды.

Әдебиеттер тізімі

- 1 Скопец, З. А. (1990). Геометрические миниатюры / сост. [и авт. прим.] Г. Д. Глейзер. – М.: Просвещение. – 224 с.
- 2 Понарин, Я. П. (2004). Алгебра комплексных чисел в геометрических задачах. – М.: МЦНМО. – 160с.
- 3 Сагиндыков, Б. Ж. (2020). Комплексные числа в задачах планиметрии // Математическое образование. Москва. №3(95) – С. 14-20.
- 4 Сагиндыков, Б.Ж., Бимурат, А. (2019). Применение аппарата комплексных чисел при решении геометрических задач (планиметрии) // Матер. Межд. научно-практической конф., г. Пенза, 2019. – С.27-32.
- 5 Сагиндыков, Б.Ж., Бимурат, А. (2020). Теорема Стюарта на языке комплексных чисел // Матер. Межд. научно-практической конф., г. Пенза. – С.16-21.
- 6 Сагиндыков, Б.Ж., Бимурат, А. (2020). Вписанные и описанные четырехугольники в комплексных числах // Матер. Межд. научно-практической конф., г. Пенза. – С.11-22.
- 7 Сагиндыков Б.Ж., Бимурат А. (2020). Скалярное и векторное произведения векторов через комплексные числа и их применение // Сборник статей XVIII международной научно-практической конференции European Scientific Conference, г. Пенза. – С.19-25.
- 8 Сагиндыков, Б.Ж., Бимурат, А. (2020). Вписанные и описанные окружности треугольника в комплексных числах // Сборник статей V международной научно-практической конференции European Scientific Conference, г. Пенза. – С.13-17
- 9 Zeeman, E.C. (1961). On the Relation between Real Euclidean and Complex Projective Geometry. *The Mathematical Gazette*. 45(352), 108-117.
- 10 Pamfilos, P. (2022). Similarities related to pivoting and Brocard points. *International journal of geometry* 11(1), 54-77.
- 11 Sullivan, K. (1976). The Teaching of Elementary Calculus Using the Nonstandard Analysis of Approach. *The American Mathematical Monthly*. 83(5), 370-375.
- 12 Nunokawa, K. (2005). Mathematical problem solving and learning mathematics: What we expect students to obtain. *Journal of Mathematical Behavior*. 24, 325-340.
- 13 Сагиндыков, Б.Ж. (2024). Комплекс сандар алгебрасының математикадағы қолданысы: Оқу құралы. – Алматы: Қ.И. Сәтбаев атындағы ҚазҰТЗУ. – 168 б.
- 14 Fraivert, D. (2019). Pascal-points quadrilaterals inscribed in a cyclic quadrilateral. *The Mathematical Gazette*. 2019;103(557):233-239. doi:10.1017/mag.2019.54
- 15 Eren, K., Ersoy, S., Pennestri, E. (2024). Instantaneous kinematics of a planar two-link open chain in complex plane. *Mechanism and Machine Theory*, 191, 105512. <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2023.105512>

References

- 1 Skopets, Z. A. (1990). Geometricheskie miniatyury [Geometric miniatures]. Moscow: Prosveshchenie. [in Russ.]
- 2 Ponarin, Ya. P. (2004). Algebra kompleksnykh chisel v geometricheskikh zadachakh [Algebra of complex numbers in geometric problems]. Moscow: MCNMO. [in Russ.]
- 3 Sagindykov, B. Zh. (2020). Kompleksnye chisla v zadachakh planimetrii. *Matematicheskoe obrazovanie*, [Complex numbers in planimetry problems. *Mathematical education*]. 3(95), 14-20. [in Russ.]
- 4 Sagindykov, B. Zh., & Bimurat, A. (2019). Primenenie apparata kompleksnykh chisel pri reshenii geometricheskikh zadach (planimetrii). *Materialy Mezhd. nauchno-prakticheskoi konf. Penza, Rossiyskaya Federatsiya*. [Application of the apparatus of complex numbers in solving geometric problems (planimetry). *Proceedings of the Int. Scientific and Practical Conference, Penza*]. Pp.27-32. [in Russ.]
- 5 Sagindykov, B. Zh., & Bimurat, A. (2020). Teorema Styuarta na yazyke kompleksnykh chisel. *Materialy Mezhdunarodnoi nauchno-prakticheskoi konferentsii* [Stewart's theorem in the language of complex numbers. *Proceedings of the Int. Scientific and Practical Conference, Penza*]. Pp. 16-21). [in Russ.]
- 6 Sagindykov, B. Zh., & Bimurat, A. (2020). Vpisanye i opisanye chetyrehugol'niki v kompleksnykh chislakh. V *Materialy Mezhdunarodnoi nauchno-prakticheskoi konferentsii* [Inscribed and described quadrilaterals in complex numbers. *Proceedings of the Int. Scientific and Practical Conference, Penza*]. Pp 11-22. [in Russ.]
- 7 Sagindykov, B. Zh., & Bimurat, A. (2020). Skalyarnoe i vektornoe proizvedeniya vektorov cherez kompleksnye chisla i ikh primeneniye. V *Sbornik statei XVIII mezhdunarodnoi nauchno-prakticheskoi konferentsii European Scientific Conference* (s. 19-25). [Scalar and vector products of vectors through complex numbers and their application // *Collection of articles of the XVIII International scientific and practical conference European Scientific Conference, Penza*. Pp.19-25. [in Russ.]
- 8 Sagindykov, B. Zh., & Bimurat, A. (2020). Vpisanye i opisanye okruzhnosti treugol'nika v kompleksnykh chislakh. *Sbornik statei V mezhdunarodnoi nauchno-prakticheskoi konferentsii European Scientific Conference*. [Inscribed and described circles of a triangle in complex numbers. *Collection of articles of the V International scientific and practical conference European Scientific Conference, Penza*. Pp.13-17. [in Russ.]
- 9 Zeeman, E. C. (1961). On the Relation between Real Euclidean and Complex Projective Geometry. *The Mathematical Gazette*, 45(352), 108-117.
- 10 Pamfilos, P. (2022). Similarities related to pivoting and Brocard points. *International Journal of Geometry*, 11(1), 54-77.
- 11 Sullivan, K. (1976). The Teaching of Elementary Calculus Using the Nonstandard Analysis of Approach. *The American Mathematical Monthly*, 83(5), 370-375.
- 12 Nunokawa, K. (2005). Mathematical problem solving and learning mathematics: What we expect students to obtain. *Journal of Mathematical Behavior*, 24, 325-340.
- 13 Sagındıkov B.Zh. "Kompleks sandar algebrasının matematikadağı qoldanısı: Oqu qūralı". – Almatı: Q.I. Sātbaev atyndağı QazÚTZÚ, 2024. – 168 b.
- 16 Fraivert D. (2019). Pascal-points quadrilaterals inscribed in a cyclic quadrilateral. *The Mathematical Gazette*. 2019;103(557):233-239. doi:10.1017/mag.2019.54
- 14 Eren K., Ersoy S., Pennestri E. (2024). Instantaneous kinematics of a planar two-link open chain in complex plane. *Mechanism and Machine Theory*, 191, 105512. <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2023.105512>

ПРИМЕНЕНИЕ АЛГЕБРЫ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ В ПЛАНИМЕТРИИ

Б. Ж. Сагиндыков¹, Ж. Бимурат²

¹ Satbayev University, Алматы, Казахстан

¹Е-mail автора-корреспондента: b.sagindykov@satbayev.university

² Институт горного дела имени Д.А. Кунаева, Алматы, Казахстан

² bimuratzhanar@gmail.com

Аннотация

Данная статья исследует целостность математических знаний в системе непрерывного математического образования с применением алгебры комплексных чисел. Цель исследования заключается в доказательстве теорем планиметрии и выявлении роли алгебры комплексных чисел в решении нестандартных и олимпиадных задач различной сложности. Методология основана на использовании алгебры комплексных чисел для решения планиметрических задач, что способствует повышению интереса учащихся к математике и развитию их познавательной активности, критического и аналитического мышления.

Результаты исследования показали, что алгебра комплексных чисел действительно эффективна при решении задач планиметрии. В статье приведены примеры, где применение методов алгебры комплексных чисел дало отличные результаты в решении разнообразных задач. Таким образом, статья подтверждает важность и

актуальность изучения алгебры комплексных чисел в контексте современных образовательных потребностей и требований к математическому образованию.

Значимость исследования для науки заключается в обогащении методологии обучения математике, особенно в области планиметрии, и показывает, как применение алгебры комплексных чисел может способствовать улучшению понимания математических концепций учащимися. Кроме того, данное исследование подтверждает роль математики в повседневной жизни и в различных профессиях, где математические знания и навыки оказываются необходимыми. Таким образом, статья вносит вклад в развитие образования и общества, подчеркивая важность глубокого изучения математики и применения ее методов в различных областях знаний и практике.

Ключевые слова: комплексные числа, ортоцентр, инцентр, формула Эйлера, прямая Эйлера, теорема Симсона

APPLICATION OF COMPLEX NUMBER ALGEBRA IN PLANE GEOMETRY

Bimurat Zh. Sagindykov¹, Zhanar Bimurat²

¹Satbayev University, Almaty, Kazakhstan

¹E-mail of the corresponding author: b.sagindykov@satbayev.university

²Mining Institute named after D. A. Kunayev, Almaty, Kazakhstan

²bimuratzhanar@gmail.com

Abstract

This article explores the integrity of mathematical knowledge in the continuous mathematical education system using complex number algebra. The research aims to prove the theorems of planimetry and identify the role of complex number algebra in solving nonstandard and olympiad problems of various complexities. The methodology is based on the application of complex number algebra to solve planimetric problems, which enhances students' interest in mathematics and fosters their cognitive activity, critical and analytical thinking.

The research results demonstrate the effectiveness of complex number algebra in solving planimetric problems. The article presents examples where the application of complex number algebraic methods yielded excellent results in solving various problems. Thus, the article confirms the importance and relevance of studying complex number algebra in the context of modern educational needs and requirements for mathematical education.

The significance of this research lies in enriching the methodology of mathematics teaching, particularly in the field of planimetry, and shows how the application of complex number algebra can contribute to students' improved understanding of mathematical concepts. Moreover, this study reaffirms the role of mathematics in everyday life and various professions, where mathematical knowledge and skills are essential. Thus, the article contributes to the development of education and society, highlighting the importance of in-depth study of mathematics and its application in various fields of knowledge and practice.

Key words: complex numbers, orthocenter, incenter, Euler's formula, Euler line, Simpson's theorem

АВТОРЛАР ТУРАЛЫ МӘЛІМЕТ

Сағиндықов Бимұрат Жұмабекұлы – ф.-м.ғ.к., қауымдастырылған профессор, Қ.И. Сәтбаев атындағы Қазақ ұлттық техникалық зерттеу университеті. Мекенжай: Қазақстан Республикасы, 050013, Алматы қ., Сәтбаев көшесі 22; b.sagindykov@satbayev.university

Бимұрат Жанар – PhD, кіші ғылыми қызметкер, Д.А. Қонаев атындағы Тау-кен институты. Мекенжай: Қазақстан Республикасы, 050046, Алматы қ., Абай даңғ., 191; bimuratzhanar@gmail.com

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Сагиндыков Бимурат Жумабекович – к.ф.-м.н., ассоциированный профессор, Казахский национальный исследовательский технический университет им. К.И. Сатпаева. Адрес: Республика Казахстан, 050013, г. Алматы, ул. Сатпаева 22; b.sagindykov@satbayev.university

Бимурат Жанар – PhD, младший научный сотрудник, Институт горного дела им. Д.А. Кунаева. Адрес: Республика Казахстан, 050046, г.Алматы, проспект Абая 191; bimuratzhanar@gmail.com

INFORMATION ABOUT AUTHORS

Bimurat Zh. Sagindykov – PhD, Associate Professor, Satbayev University. Address: Republic of Kazakhstan, 050013, Almaty, Satpaev Street 22; b.sagindykov@satbayev.university

Zhanar Bimurat – PhD, Junior Researcher, Mining Institute named after D. A. Kunayev. Address: Republic of Kazakhstan, 050046, Almaty, Abay Avenue 191; bimuratzhanar@gmail.com